Chapitre 1.1b – La dérivée et le mouvement harmonique simple

Les équations du mouvement harmonique simple (MHS)

La solution complète à l'oscillateur harmonique simple OHS est composée du mouvement harmonique simple et de ses dérivées. La position peut être une fonction sinus ou cosinus, car ce sont des fonctions identiques à une constante de phase ϕ près :

Oscillateur harmonique simple	Mouvement harmonique simple
$a_x = -\omega^2 x$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$	$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ $v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$ $a_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$

où $x(t)$: Position selon l'axe x (m)

$v_x(t)$: Vitesse selon l'axe x (m/s)

$a_x(t)$: Accélération selon l'axe x (m/s^2)

t : Temps (s)

A : Amplitude du mouvement (m)

ω : Fréquence angulaire (rad/s)

ϕ : Constante de phase (rad)

<u>Preuve :</u>

Appliquons la dérivée de l'équation $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ par rapport au temps t pour obtenir l'équation de la vitesse $v_x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}(A\sin(\omega t + \phi))}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = A\frac{\mathrm{d}(\sin(\omega t + \phi))}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t + \phi) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\sin(x)}{\mathrm{d}x} = \cos(x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \quad \blacksquare \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\,x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}\right)$$

Appliquons la dérivée de l'équation $v_x(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$ par rapport au temps t pour obtenir l'équation de l'accélération vitesse $a_x(t)$:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}(A\omega\cos(\omega t + \phi))}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \qquad a_x(t) = A\omega\frac{\mathrm{d}(\cos(\omega t + \phi))}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \qquad a_x(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)\frac{\mathrm{d}(\omega t + \phi)}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)\right)$$

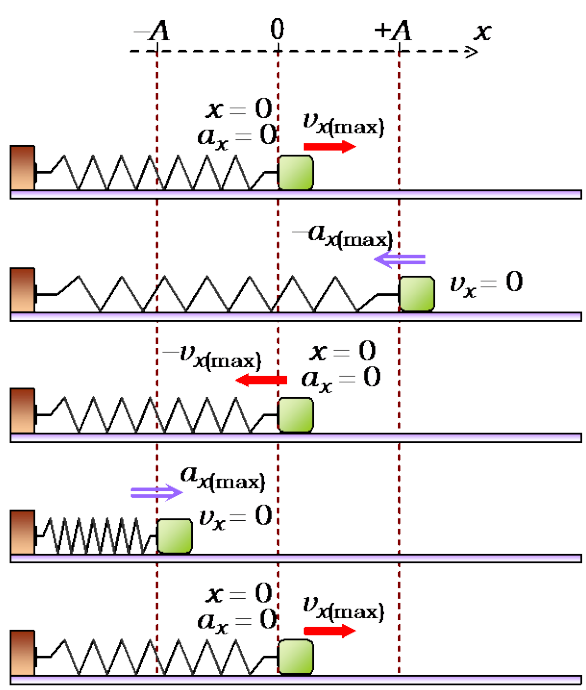
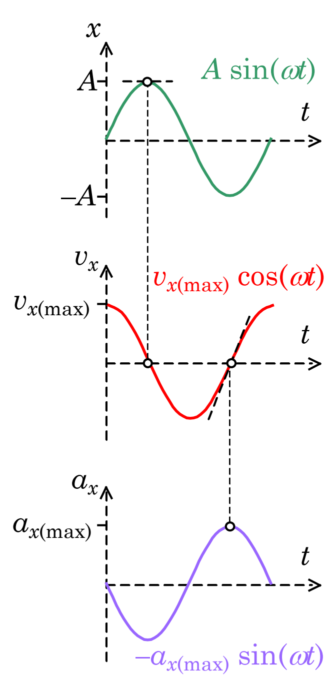
$$\Rightarrow \qquad a_x(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)\left(\frac{\mathrm{d}(\omega t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\phi)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad a_x(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \quad \blacksquare \qquad \left(\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}\right)$$

Représentation graphique du MHS

La représentation graphique du mouvement harmonique simple MHS se fait à partir de fonctions sinus et cosinus. Voici une représentation possible à l'aide d'une constante de phase $\phi = 0$ et d'une fonction de position en sinus :

- Position : $x = A\sin(\omega t)$
- Vitesse : $v_x = A\omega\cos(\omega t) = v_{x(\max)}\cos(\omega t)$
- Accélération : $a_x = -A\omega^2\sin(\omega t) = -a_{x(\max)}\sin(\omega t)$

<table>
<tr><th>Mouvement harmonique simple</th><th>Fonctions : $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Situation 4 : ***La vitesse et l'accélération dans un MHS, prise 2.*** Un mobile est animé d'un MHS le long de l'axe x ; sa position en fonction du temps est donnée par

$$x = 0{,}2\cos(3t+5)$$

où x est en mètres et t est en secondes et la phase est en radians. On désire déterminer la position, la vitesse et l'accélération du mobile à $t = 5\ \text{s}$.

Nous avons l'équation de la position suivante :

$$x = 0{,}2\cos(3t+5)$$

Avec la dérivée de la position, évaluons l'équation de la vitesse :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad v_x = \frac{\mathrm{d}(0{,}2\cos(3t+5))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer la fonction } x\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad v_x = 0{,}2\frac{\mathrm{d}(\cos(3t+5))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Sortir la constante)}$$

$$\Rightarrow\quad v_x = 0{,}2[-\sin(3t+5)]\frac{\mathrm{d}(3t)}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\cos(f(x))}{\mathrm{d}x} = -\sin(f(x))\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{v_x = -0{,}6\sin(3t+5)} \qquad \text{(Dérivée d'un polynôme : } \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}\text{)}$$

Avec la dérivée de la vitesse, évaluons l'équation de l'accélération :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad a_x = \frac{\mathrm{d}(-0{,}6\sin(3t+5))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer la fonction } v_x\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad a_x = -0{,}6\frac{\mathrm{d}(\sin(3t+5))}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Sortir la constante)}$$

$$\Rightarrow\quad a_x = -0{,}6[\cos(3t+5)]\frac{\mathrm{d}(3t)}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\sin(f(x))}{\mathrm{d}x} = \cos(f(x))\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{a_x = -1{,}8\cos(3t+5)} \qquad \text{(Dérivée d'un polynôme : } \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}\text{)}$$

Ainsi, nous avons les informations suivantes à $t = 5$ s :

Position : $x(t=5) = 0{,}2\cos(3(5)+5) \quad\Rightarrow\quad \boxed{x(t=5) = 0{,}0816\ \text{m}}$

Vitesse : $v_x(t=5) = -0{,}6\sin(3(5)+5) \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_x(t=5) = -0{,}548\ \text{m/s}}$

Accélération : $a_x(t=5) = -1{,}8\cos(3(5)+5) \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_x(t=5) = -0{,}735\ \text{m/s}^2}$